Контрольная работа №2

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, определяются координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Произведением вектора $\vec{a}$ и числа λ

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Длиной или модулем вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$$

Смешанное произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \ \vec{a} = \lambda \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$$

Уравнения прямой на плоскости:
Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_x t + x_0 \\ y = a_y t + y_0 \end{cases},$$

где $\vec{a} = (a_x; a_y)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M(x_0; y_0)$ лежит на прямой.
Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$$

Общее уравнением прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярен к прямой и называется нормальным вектором прямой, а вектор $\vec{l} = (-B; A)$ – направляющий вектор прямой.
Расстояние ρ от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.
Параметрические уравнения прямой

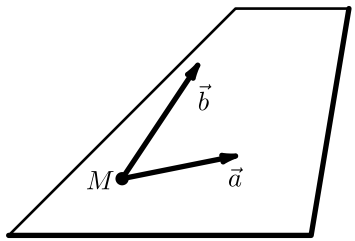
$$\begin{cases} x = a_x t + x_0 \\ y = a_y t + y_0 \\ z = a_z t + z_0 \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

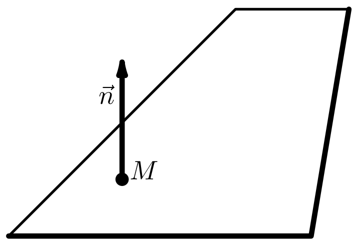
Уравнение плоскости проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$



Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

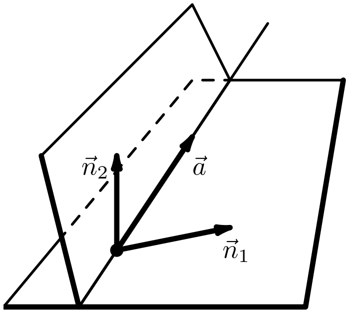


Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1{=}0, & \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2{=}0, & \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases},$$



определяется по формуле

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2].$$

Величина угла ψ между прямой

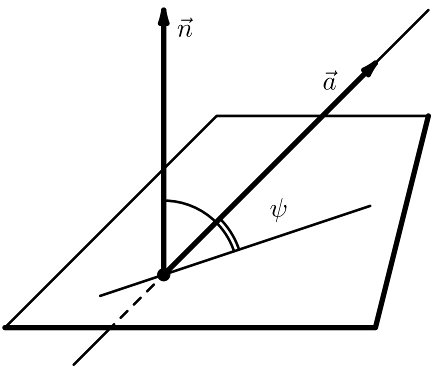
$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}, \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = (A, B, C)$$

вычисляется по формуле

$$\sin\psi = \frac{|(\vec{n}, \vec{a})|}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|}.$$



Тема: Векторы.

1. (*1*) Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(2-3;7-6;3-4)=(-1;1;-1)$ $\overrightarrow{AC}=(4-3;6-6;5-4)=(1;0;1)$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-1\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 1=-2$$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$. Окончательно получаем $\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}$

2. (*1*) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. Так как $\cos\varphi=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-1),\quad \overrightarrow{AC}=(1,0,1)$$

Находим:

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-1\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 1=-2,\\
&|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},\\
&|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\cos\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ и $\varphi=\arccos\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)\approx 2,53$.

3. (*1*) Выяснить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правой или левой), если $\vec{a}=(0;-1;2)$, $\vec{b}=(-2;-1;0)$, $\vec{c}=(-2;-1;-2)$.

Решение. Вычисляем

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=4>0,$$

т. е. тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

4. (*2*) Найти площадь $\triangle ABC$, если известны координаты его вершин: $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. Известно, что $S_\triangle = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|$ Находим: $\overrightarrow{AB} = (2-3; 7-6; 3-4) = (-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (4-3; 6-6; 5-4) = (1;0;1)$,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \vec{i} - \vec{k} = (1;0;-1)$$

Окончательно имеем:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

5. (*2*) Найти объем пирамиды $ABCD$, если известны координаты ее вершин: $A(3;-7;1)$, $B(2;-8;1)$, $C(2;-8;2)$, $D(4;-7;0)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;0),$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1;-1;1),$$
$$\overrightarrow{AD} = (1;0;-1).$$

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

Так как объем пирамиды равен $\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$, то $V = \dfrac{1}{6}$.

6. (*2*) Показать, что векторы $\vec{a} = (-1;-1;1)$, $\vec{b} = (0;-1;-1)$, $\vec{c} = (-1;1;1)$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{d} = (0;5;-1)$ по этому базису.

Решение. Если определитель составленный из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не равен 0, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – базис.
Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через x, y, z. Тогда $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Следовательно, $x\vec{a} = (-x; -x; x)$, $y\vec{b} = (0; -y; -y)$, $z\vec{c} = (-z; z; z)$ и

$$(0; 5; -1) = (-x - z; -x - y + z; x - y + z),$$

а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z:

$$\begin{cases} -x-z= 0, \\ -x-y + z= 5, \\ x-y + z= -1. \end{cases}$$

Ее решение: $x = -3$, $y = 1$, $z = 3$. Итак, $\vec{d} = (-3; 1; 3)$.

7. (*2*) Найти вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (1; 1; 1)$ и $\vec{b} = (-3; 6; 6)$ и удовлетворяет условию $(\vec{c}, \vec{d}) = -9$, если вектор $\vec{d} = (0; 1; 0)$.

Решение. Пусть $\vec{c} = (x; y; z)$, тогда

$$(\vec{c}, \vec{a}) = 0, \quad x + y + z = 0,$$

$$(\vec{c}, \vec{b}) = 0, \quad -3x + 6y + 6z = 0,$$

$$(\vec{c}, \vec{d}) = -9, \quad y = -9.$$

Получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z. Ее решение: $x = 0$, $y = -9$, $z = 9$.

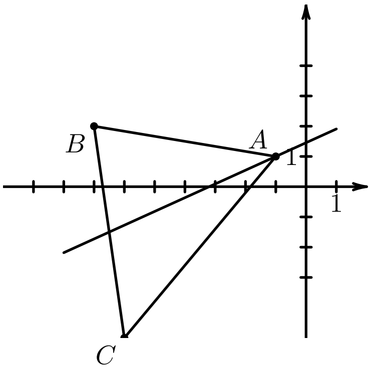
Тема: Прямая на плоскости.

8. (*1*) Найти направляющий вектор прямой $5\,x + 7\,y + 2 = 0$. Сделать чертеж.

Решение. Поскольку, $A = 5$, $B = 7$, то

$$\vec{l} = (-7, 5)$$

9. (*1*) В треугольнике ABC найти уравнение медианы, проведенной из вершины A, если $A(-1;1)$, $B(-7;2)$, $C(-6;-5)$. Сделать чертеж.



Решение. $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-7 + (-6)}{2} = -\dfrac{13}{2}$,

$y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{2 + (-5)}{2} = -\dfrac{3}{2}$

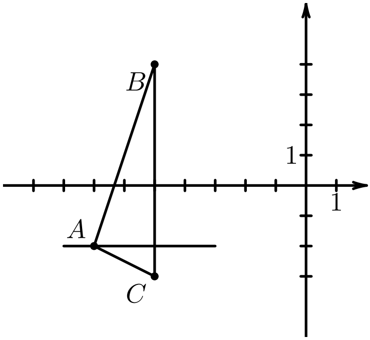
$M(-\dfrac{13}{2}, -\dfrac{3}{2})$

$\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{13}{2} + 1, -\dfrac{3}{2} - 1\right) = \left(-\dfrac{11}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$

$\dfrac{x - (-1)}{-\dfrac{11}{2}} = \dfrac{y - 1}{-\dfrac{5}{2}}$

$\dfrac{x + 1}{11} = \dfrac{y - 1}{5}$

10. (*1*) В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведенной из вершины A, если $A(-7;-2)$, $B(-5;4)$, $C(-5;-3)$. Сделать чертеж.



Решение.

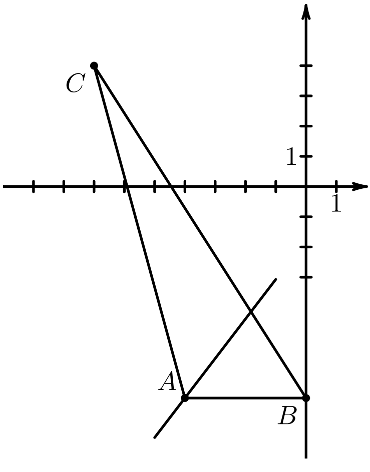
$$\overrightarrow{BC} = (0; -7),$$

$$0 \cdot (x - (-7)) - 7 \cdot (y - (-2)) = 0$$

$$-7 \cdot (y - (-2)) = 0$$

$$y + 2 = 0$$

11. (*2*) В треугольнике ABC найти уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A, если $A(-4; -7)$, $B(0; -7)$, $C(-7; 4)$. Сделать чертеж.



Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (4; 0), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3; 11), \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (11)^2} = \sqrt{130}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{4}(4;0) + \frac{1}{\sqrt{130}}(-3;11) =$$

$$= (1;0) + \left(\frac{-3}{\sqrt{130}}; \frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{130}}; \frac{11}{\sqrt{130}}\right)$$

$$\frac{x-(-4)}{1 - \dfrac{3}{\sqrt{130}}} = \frac{y-(-7)}{\dfrac{11}{\sqrt{130}}}$$

$$\frac{x+4}{\sqrt{130}-3} = \frac{y+7}{11}$$

12. (*1*) Точка $A(3;3)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $-4\,x - y + 5 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата. Сделать чертеж.

Решение.

$$\rho = \frac{|-4\cdot 3 - 1\cdot 3 + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{17}}$$

$$S_{\square} = \rho^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{100}{17}$$

13. (*2*) Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно прямой, проходящей через точки A и C, если $A(-5;-7)$, $B(1;2)$, $C(-3;-1)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AC} = (2;6)$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3},$$

$$3\cdot(x-1) = 1\cdot(y-2), \quad 3x - 3 = y - 2,$$

$$3x - y - 1 = 0$$

Тема: Плоскость в пространстве.

14. (*1*) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(5;-3;6)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (-3;-2;0)$.

Решение.

$$-3 \cdot (x-5) - 2 \cdot (y-(-3)) + 0 \cdot (z-6) = 0$$

$$-3x + 15 - 2y - 6 = 0$$

$$-3x - 2y + 9 = 0$$

15. (*1*) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3;-2;4)$ параллельно плоскости $4\,x - 7\,y + 6\,z + 6 = 0$.

Решение. Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором данной плоскости; следовательно, уравнение искомой плоскости примет вид

$$4\,(x-3) - 7\,(y+2) + 6\,(z-4) = 0,$$

или

$$4\,x - 7\,y + 6\,z - 50 = 0$$

16. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-7;0;4)$ перпендикулярно плоскостям $3\,x + 5\,y - 6\,z + 7 = 0$ и $-4\,x - 3\,y - 5\,z + 3 = 0$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-0 & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+7 & y & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} (x+7) - \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} (z-4) =$$

$$-43(x+7) + 39y + 11(z-4) = -43x + 39y + 11z - 345$$

$$-43x + 39y + 11z - 345 = 0$$

17. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-5;-4;-2)$ и $B(-4;-2;-4)$ перпендикулярно плоскости $x + 5\,y - 5\,z - 4 = 0$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; -2)$$

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-(-4) & z-(-2) \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$y + z + 6 = 0.$$

18. (*1*) Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей $-5\,x - 2\,y + 3\,z - 2 = 0$ и $-5\,x + 5\,y + 6\,z - 5 = 0$.

Решение. $\vec{n}_1 = (-5; -2; 3)$ $\vec{n}_2 = (-5; 5; 6)$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -5 \cdot (-5) + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 33$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{38}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2 + (6)^2} = \sqrt{86}.$$

$$\cos\varphi = \frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}}\right) \approx 0.95541.$$

19. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7; 3; -7)$, $B(7; 4; -7)$, $C(7; 1; -9)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (0; 1; 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0; -2; 2)$$

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-(-7) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 14 = 0, \quad x - 7 = 0.$$

20. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2; -3; -3)$ и $B(-2; -2; -2)$ параллельно вектору $\vec{d} = (1; 0; 0)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$$

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-(-3) & z-(-3) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(x+2)-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y+3)+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(z+3)$$

$$y-z=0.$$

21. (*2*) Вычислить расстояние от точки O до плоскости, проходящей через точки $A(7;3;-7)$, $B(7;4;-7)$, $C(8;1;-9)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=(0;1;0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(1;-2;2)$$

$$\begin{vmatrix} x-(7) & y-(3) & z-(-7) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$2x-z-21=0$$

$$\rho=\frac{|2\cdot 0-0-21|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\frac{21}{\sqrt{5}}$$

Тема: Прямая в пространстве.

22. (*1*) Найти направляющий вектор прямой $-7\,x-4\,y+2\,z-2=0$, $4\,x-7\,z-4=0$.

Решение.

$$\vec{n}_1=(-7;-4;2),\quad \vec{n}_2=(4;0;-7)$$

$$\vec{l}=[\vec{n}_1,\vec{n}_1]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}=28\vec{i}-41\vec{j}+16\vec{k}=(28;-41;16)$$

23. (*1*) Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями: $x=7\,t+4,\ y=3\,t+6,\ z=5,\ x=-4\,t-6,\ y=t-7,\ z=-2\,t+3.$

Решение.

$$\vec{l_1} = (7;3;0), \quad \vec{l_2} = (-4;1;-2)$$

$$(\vec{l_1}, \vec{l_2}) = 7 \cdot (-4) + (3) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = -25$$

$$|\vec{l_1}| = \sqrt{(7)^2 + (3)^2 + (0)^2} = \sqrt{58}, \quad |\vec{l_2}| = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

$$\cos\varphi = \frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}}\right) \approx 2.8102.$$

24. (*1*) Составить общие уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;1;-6)$ и $B(5;-3;-4)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$,

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-(-6)}{2},$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+6}{1},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-2}, \\ \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+6}{1} \end{cases}, \quad \begin{cases} -2(x-3) = y-1, \\ y-1 = -2(z+6) \end{cases}, \quad \begin{cases} -2x - y + 7 = 0, \\ y + 2z + 11 = 0 \end{cases}$$

25. (*1*) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $C(-3;-4;6)$ параллельно прямой $2\,x + 5\,y + 3\,z + 6 = 0$, $-7\,x - 5\,y - 6\,z + 6 = 0$.

Решение.

$$\vec{n}_1 = (2;5;3), \quad \vec{n}_2 = (-7;-5;-6)$$

$$\vec{l} = [\vec{n}_1, \vec{n}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 3 \\ -7 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-15, -9, 25)$$

$$\frac{x-(-3)}{-15} = \frac{y-(-4)}{-9} = \frac{z-(6)}{25}$$

$$\frac{x+3}{-15} = \frac{y+4}{-9} = \frac{z-6}{25}$$

26. (*1*) Доказать, что две прямые $x-2\,y-3\,z+1=0$, $-2\,x+y+7\,z-2=0$ и $x=-t+2,\ y=-t+1,\ z=4\,t+1$ перпендикулярны.

Решение.

$$\vec{n}_1=(1;-2;-3),\quad \vec{n}_2=(-2;1;7)$$

$$\vec{l}_1=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & -3\\ -2 & 1 & 7\end{vmatrix}=(-11;-1;-3)$$

$$\vec{l}_2=(-1;-1;4)$$

Находим скалярное произведение этих векторов; так как $(\vec{l}_1,\vec{l}_2)=0$, то $\vec{l}_1\perp\vec{l}_2$.

27. (*1*) Доказать, что две прямые $-x-y-z-7=0$, $3\,x+y+z+1=0$ и $x=-2,\ y=t-3,\ z=-t+1$ параллельны.

Решение.

$$\vec{n}_1=(-1;-1;-1),\quad \vec{n}_2=(3;1;1)$$

$$\vec{l}_1=[\vec{n}_1,\vec{n}_1]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0;-2;2)$$

$$\vec{l}_2=(0;1;-1)$$

$$\vec{l}_1=-2\vec{l}_2$$

Тема: Прямая и плоскость в пространстве.

28. (*1*) Определить угол между плоскостью $2\,x+y+z+5=0$ и прямой $x=-2\,t-2,\ y=t+1,\ z=2\,t+7$.

Решение.

$$\vec{n}=(2;1;1),\quad \vec{l}=(-2;1;2)$$

$$(\vec{n},\vec{l})=2\cdot(-2)+1\cdot1+1\cdot2=-1$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{(2)^2+(1)^2+(1)^2}=\sqrt{6},\quad |\vec{l}|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(2)^2}=\sqrt{9}=3.$$

$$\sin\psi=\frac{|(\vec{n},\vec{l})|}{|\vec{n}||\vec{l}|},$$

$$\varphi=\arcsin\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right)\approx 0.13650.$$

29. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;0;1)$ перпендикулярно прямой $x=2\,t+3,\ y=-4\,t+4,\ z=7\,t-5$.

Решение.

$$\vec{n}=(2;-4;7)$$

$$2(x-1)-4y+7(z-1)=0$$

$$2x-2-4y+7z-7=0$$

$$2x-4y+7z-9=0$$

30. (*1*) Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;-7;-6)$ перпендикулярно к плоскости $-3\,x-y+2\,z-5=0$.

Решение.

$$\begin{cases} x=-3t+4, \\ y=-t-7, \\ z=2t-6 \end{cases}$$

31. (*2*) Найти точку B^{*}, симметричную точке $B(-4;-3;-1)$ относительно плоскости $3\,x-3\,y+7\,z+3=0$.

Решение.

$$\begin{cases} x=\ \ 3t-4 \\ y=-3t-3 \\ z=\ \ 7t-1 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости

$$3(3t-4)-3(-3t-3)+7(7t-1)+3=0$$

$$9t-12+9t+9+49t-7+3=0, \quad 67t=-7,$$

найдем $t=-\dfrac{7}{67}$, откуда $x_P=3(-\dfrac{7}{67})-4=-289/67$, $y_P=-3(-\dfrac{7}{67})-3=-180/67$, $z_P=7(-\dfrac{7}{67})-1=-116/67$.

Координаты симметричной точки найдутся из формул

$$x_P=\frac{x_B+x_{B^*}}{2}, \quad y_P=\frac{y_B+y_{B^*}}{2}, \quad z_P=\frac{z_B+z_{B^*}}{2},$$

т. е

$$x_{B^*}=2\cdot x_P-x_B, \quad y_{B^*}=2\cdot y_P-y_B, \quad z_{B^*}=2\cdot z_P-z_B.$$

Таким образом,

$$x_{B^*} = -310/67, \quad y_{B^*} = -159/67, \quad z_{B^*} = -165/67.$$

32. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5; 1; -4)$ перпендикулярно прямой $4\,x - 7\,y - 3\,z + 4 = 0$, $-4\,x - 7\,y + 6\,z + 4 = 0$.

Решение.

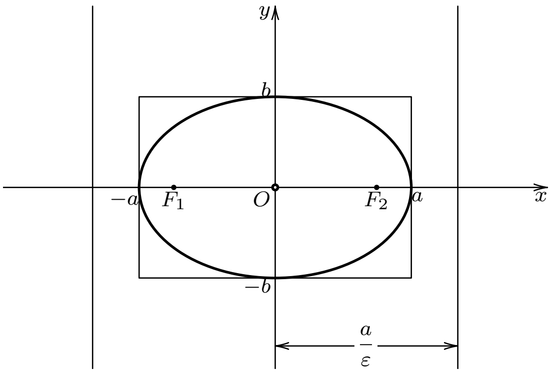
$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-(-4) \\ 4 & -7 & -3 \\ -4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-63x - 12y - 56z + 103 = 0.$$

<u>Эллипс</u> имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a \geqslant b > 0$. При $a = b$ эллипс есть окружность. Число a, называется *большой полуосью*, число b, называется *малой полуосью*. Точка $O(0,0)$, называется *центром*, точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$, называются *вершинами*. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $0 \leqslant \varepsilon < 1$), при $\varepsilon \neq 0$ прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами*. Фокус $(c, 0)$ и директриса $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c, 0)$ и директриса $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые.



33. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2 + 8x) + 9(y^2 - 6y) = -109.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 64 + 81 - 109$$

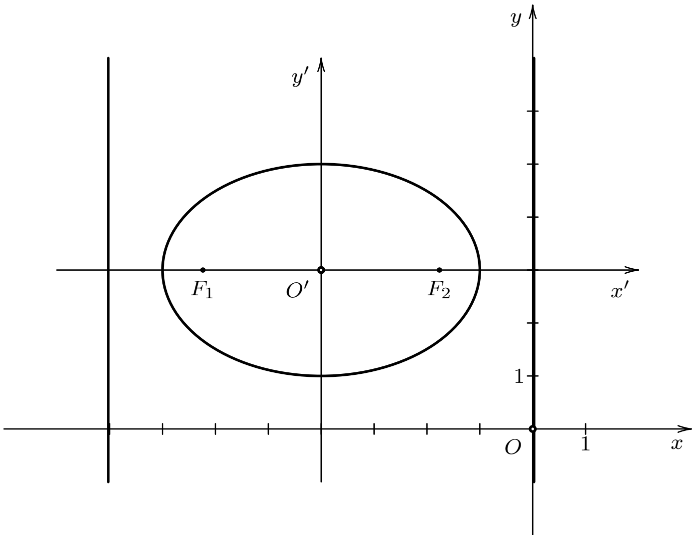
или, после преобразований,

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Перенесем начало координат в точку $O'(-4,3)$ полагая $x' = x+4$, $y' = y-3$ будем иметь

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

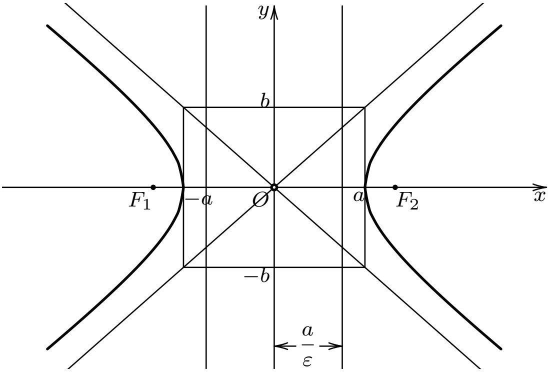
Это есть уравнение эллипса. Центр его лежит в точке (-4,3), а полуоси равны $a = 3$ и $b = 2$.



Гипербола имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$. Число a, называется *действительной полуосью*, число b, называется *мнимой полуосью*. Точка $O(0,0)$, называется *центром*, точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$, называются *вершинами*. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $\varepsilon > 1$). Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами.* Фокус $(c, 0)$ и директриса $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c, 0)$ и директриса $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые. Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.



34. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 54y - 53 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 6y) = 53.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 6y + 9) = 64 - 81 + 53$$

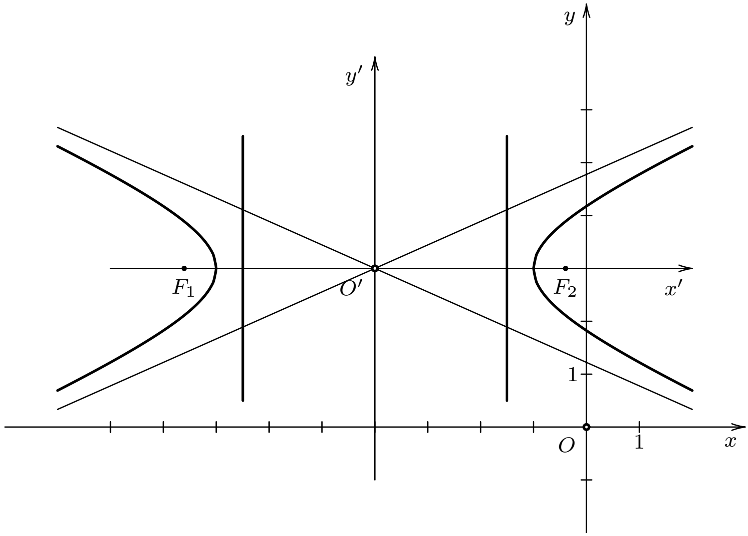
или, после преобразований,

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Перенесем начало координат в точку $O'(-4, 3)$ полагая $x' = x + 4$, $y' = y - 3$ будем иметь

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

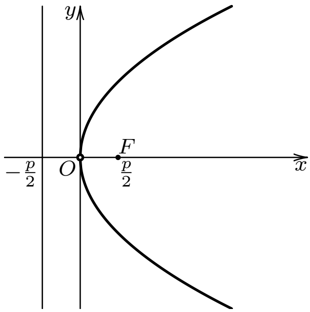
Это уравнение гиперболы с центром в точке (-4,3). Действительная полуось ее равна $a = 3$, а мнимая равна $b = 2$.



Параболa имеет каноническое уравнение

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Число p называют *параметром параболы. Вершиной* параболы является начало координат, *фокусом* – точка $F(p/2, 0)$. *Директрисой* параболы является прямая $x = -p/2$, *Эксцентриситет* параболы равен 1.



35. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$y^2 - 4x - 2y + 9 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$y^2 - 2y + 1 = 4x - 8$$

или, после преобразований,

$$(y-1)^2 = 4(x-2).$$

Вершина параболы находится в точке $O'(2,1)$, параметр $p = 2$, а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси Ox.
Перенесем начало координат в точку $O'(2,1)$ полагая $x' = x-2$, $y' = y-1$ будем иметь

$$y'^2 = 4x'.$$